

★启用前注意保密

2022 年普通高等学校招生全国统一考试模拟测试（二）

数学参考答案

评分标准：

1. 本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制订相应的评分细则。
2. 对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。
3. 解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	D	A	C	C	B	B	D

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

题号	9	10	11	12
答案	BC	BD	AC	BCD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 2 14. 2 15. $-\frac{\pi}{2}$ (答案不唯一, φ 取 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ 均可) 16. $\frac{4}{3}\pi$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。

17. 解：(1) 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q ，则由 $4a_2 = a_1a_3$ ，得 $4a_1q = a_1 \cdot a_1q^2$.
整理得 $a_1q = 4$ 1 分
又 $S_3 = 14$ ，得 $a_1(1 + q + q^2) = 14$ 2 分
联立得 $\begin{cases} a_1q = 4, \\ a_1(1 + q + q^2) = 14, \end{cases}$ 消去 a_1 ，得 $2q^2 - 5q + 2 = 0$ 3 分
解得 $q = 2$ 或 $q = \frac{1}{2}$.

又因为 $\{a_n\}$ 为递增等比数列，

所以 $q = 2$ ， $a_1 = 2$ 4 分
所以 $a_n = a_1q^{n-1} = 2^n$ 5 分

(2) (方法一) 当 $k=1$ 时, $b_n = \begin{cases} a_1, & n=3, \\ 1, & 0 < n < 3 \end{cases}$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 则 $b_1=b_2=1$, $b_3=a_1=2$,

同理，列举得 $b_4 = b_5 = 2$ ， $b_6 = a_2 = 2^2$ ， $b_7 = b_8 = 3$ ， $b_9 = a_3 = 2^3$ ， $b_{10} = b_{11} = 4$ ， $b_{12} = a_4 = 2^4$ ， $b_{13} = b_{14} = 5$ ， $b_{15} = a_5 = 2^5$.

记 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，则

所以数列 $\{b_n\}$ 的前15项和为92. 10分

(方法二) 由 $b_n = \begin{cases} a_k, & n=3k, \\ k, & 3(k-1) < n < 3k \end{cases} \quad (k \in \mathbf{N}^*)$, 得 $b_n = \begin{cases} k, & n=3k-2, \\ k, & n=3k-1, \quad (k \in \mathbf{N}^*), \\ a_k, & n=3k \end{cases}$

记 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，则

所以数列 $\{b_n\}$ 的前15项和为92. 10分

说明：没有列举过程，直接写出各项求和不扣分.

18. 解: (1) 设路线 1 遇到红灯的个数的随机变量为 X , 则 $X \sim B(3, \frac{1}{3})$, 1 分

所以至少遇到一个红灯的事件为 $P(X \geq 1)$, 2 分

(方法一) 由对立事件概率公式,

$$= 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27},$$

所以若小李下班后选择路线 1 驾车回家, 至少遇到一个红灯的概率为 $\frac{19}{27}$ 5 分

(方法二) 由互斥事件概率加法公式,

$$\text{得 } P(X \geq 1) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$$

$$= C_3^1 \left(\frac{1}{3} \right)^1 \left(\frac{2}{3} \right)^2 + C_3^2 \left(\frac{1}{3} \right)^2 \left(\frac{2}{3} \right)^1 + C_3^3 \left(\frac{1}{3} \right)^3 \left(\frac{2}{3} \right)^0 \quad \dots \dots \dots \quad 4 \text{ 分}$$

$$= \frac{12}{27} + \frac{6}{27} + \frac{1}{27} = \frac{19}{27},$$

所以若小李下班后选择路线 1 驾车回家, 至少遇到一个红灯的概率为 $\frac{19}{27}$ 5 分

(2) 设路线 1 累计增加时间为随机变量为 Y_1 , 则 $Y_1 \sim B(3, \frac{1}{3})$,

所以 $E(Y_1) = 3 \times \frac{1}{3} = 1$, 6 分

设路线 2 第 i 个路口遇到红灯为事件 A_i ($i = 1, 2$)，则 $P(A_1) = \frac{1}{2}$, $P(A_2) = \frac{2}{3}$,

设路线 2 累计增加时间为随机变量为 Y_2 , 则 Y_2 的所有可能取值为 0, 1, 2, 则

..... 7 分

$$P(Y_2 = 0) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$

$$P(Y_2 = 1) = P(\overline{A_1}A_2) + P(A_1\overline{A_2}) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2},$$

因为 $E(Y_1) < E(Y_2)$, 11分

所以为使小李下班后驾车回家时长的累计增加时间的期望最小，小李应选择路线1. 12分

19. (1) 证明: 在 $\triangle ABP$ 中, 由正弦定理得 $\frac{PB}{\sin \alpha} = \frac{AB}{\sin \angle APB}$,

要证明 $PB \sin \angle ABC = AB \sin \alpha$, 只需证明 $\sin \angle ABC = \sin \angle APB$.

在 $\triangle ABP$ 中， $\angle APB = \pi - (\alpha + \angle ABP)$ ， 2分

在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = \alpha + \angle ABP$ ， 3分

所以 $\angle APB = \pi - \angle ABC$, 4 分

所以 $\sin \angle APB = \sin(\pi - \angle ABC) = \sin \angle ABC$, 5分

所以 $PB \sin \angle ABC = AB \sin \alpha$ 6 分

(2) 解: 由(1)知 $PB \sin \angle ABC = AB \sin \alpha$, 又因为 $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 1$,
所以 $PB = 1$.

由已知得 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形, 所以 $\angle BCA = \angle CAB = \frac{\pi}{4}$,

则 $\angle BCP = \frac{\pi}{4} - \alpha$,

所以在 $\triangle PBC$ 中， $\angle BPC = \pi - \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \alpha = \frac{3\pi}{4}$ ，……………8分

由正弦定理得 $\frac{BC}{\sin \angle BPC} = \frac{PC}{\sin \angle PBC}$, 即 $\frac{1}{\sin \frac{3\pi}{4}} = \frac{PC}{\sin \alpha}$,

即 $PC = \sqrt{2} \sin \alpha$ 9 分

由余弦定理得 $\sin^2 \alpha + (\sqrt{2} \sin \alpha)^2 - 2 \sin \alpha (\sqrt{2} \sin \alpha) \cos \frac{3\pi}{4} = 1$, 10 分

解得 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 11 分

所以 $PC = \frac{\sqrt{10}}{5}$ 12 分

20. (1) 证明: 如图 1, 取 AC 中点 G , 连接 FG 和 EG , 由已知得

$DE \parallel BC$, 且 $DE = \frac{1}{2}BC$.

因为 F, G 分别为 AB, AC 的中点, 所以 $FG \parallel BC$, 且 $FG = \frac{1}{2}BC$.

所以 $DE \parallel FG$, 且 $DE = FG$.

所以四边形 $DEGF$ 是平行四边形. 所以 $EG \parallel DF$ 1 分

因为翻折前 $BC \perp AC$, 易知 $DE \perp AC$. 所以翻折后 $DE \perp EA$, $DE \perp EC$.

又因为 $EA \cap EC = E$, $EA, EC \subset$ 平面 AEC ,

所以 $DE \perp$ 平面 AEC .

因为 $DE \parallel BC$, 所以 $BC \perp$ 平面 AEC 2 分

因为 $EG \subset$ 平面 AEC , 所以 $EG \perp BC$ 3 分

因为 $\triangle ACE$ 是等边三角形, 点 G 是 AC 中点, 所以 $EG \perp AC$.

又因为 $AC \cap BC = C$, $AC, BC \subset$ 平面 ABC ,

所以 $EG \perp$ 平面 ABC 4 分

因为 $EG \parallel DF$, 所以 $DF \perp$ 平面 ABC 5 分

(2) 解: (方法一) 如图 2, 过点 E 作 $EH \perp EC$, 以 E 为原点,

EH, EC, ED 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立空间直角坐标系 $E-xyz$, 设 $DE = a$, 则 $A(\sqrt{3}, 1, 0)$, $B(0, 2, 2a)$, $C(0, 2, 0)$, $D(0, 0, a)$,

则 $\vec{AB} = (-\sqrt{3}, 1, 2a)$, $\vec{AC} = (-\sqrt{3}, 1, 0)$, $\vec{CD} = (0, -2, a)$, 6 分

因为 $DE \perp$ 平面 AEC , 所以 $\vec{ED} = (0, 0, a)$ 是平面 AEC 的法向量, 7 分

设面 ACD 的法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$, 则

$$\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \vec{AC} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \vec{CD} = 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} -\sqrt{3}x + y = 0, \\ -2y + az = 0. \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{3}y, \\ z = \frac{2}{a}y. \end{cases} \text{取 } y = \sqrt{3}a, \text{ 得 } \mathbf{m} = (a, \sqrt{3}a, 2\sqrt{3}),$$

..... 9 分

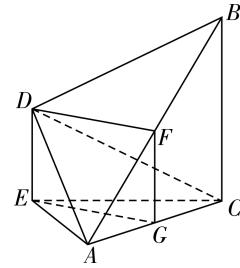


图 1

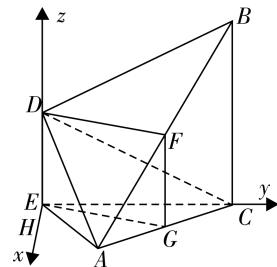


图 2

因为二面角 $D-AC-E$ 为 $\frac{\pi}{6}$, 所以 $\cos \frac{\pi}{6} = |\cos \langle \mathbf{m}, \overrightarrow{ED} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \overrightarrow{ED}|}{|\mathbf{m}| \cdot |\overrightarrow{ED}|} =$

解得 $a=1$, 所以 $\mathbf{m}=(1, \sqrt{3}, 2\sqrt{3})$, $\overrightarrow{AB}=(-\sqrt{3}, 1, 2)$ 11 分
 记直线 AB 与平面 ACD 所成角为 θ ,

$$\text{则 } \sin \theta = |\cos <\mathbf{m}, \overrightarrow{AB}>| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AB}|}{|\mathbf{m}| \cdot |\overrightarrow{AB}|} = \frac{|-\sqrt{3} + \sqrt{3} + 4\sqrt{3}|}{4 \times 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4},$$

所以直线 AB 与平面 ACD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{4}$ 12 分

(方法二) 如图 3, 连接 DG , 因为 $DE \perp$ 平面 AEC , $AC \subset$ 平面 AEC , 所以 $AC \perp DE$.

又因为 $AC \perp EG$, $DE \cap EG = E$, $DE \parallel EG \subset \text{平面 } DEG$, 所以 $AC \perp \text{平面 } DEG$.

因为 $EG, DG \subset$ 平面 DEG , 所以 $AC \perp EG, AC \perp DG$, 所以 $\angle DGE$ 是二面角 $D-AC-E$ 的平面角,

故 $\angle DGE = \frac{\pi}{6}$ 7 分

由 $\triangle ACE$ 是边长为2的等边三角形，得 $EG = \sqrt{3}$ ，

在 $\text{Rt} \triangle DGE$ 中, $\tan \angle DGE = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{DE}{EG}$, 所以 $DE = 1$, $BC = 2$ 8 分

过点 F 作 $FI \perp DG$, 垂足为 I , 9 分

因为 $AC \perp$ 平面 $DEGF$, $AC \subset$ 平面 ACD , 所以平面 $DEGF \perp$ 平面 ACD .

又因为平面 $DEGF \cap$ 平面 $ACD = DG$, $FI \subset$ 平面 $DEGF$, 且 $FI \perp DG$,

所以 $FI \perp$ 平面 ACD .

连接 AI , 则 $\angle FAI$ 即为直线 AB 与平面 ACD 所成的角. 10 分

在 $\text{Rt}\triangle DFG$ 中, $DF = \sqrt{3}$, $FG = 1$, 得 $DG = 2$, 由等面积法得 $DG \cdot FI = DF \cdot FG$, 解

$$\text{得 } FI = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

在 $\text{Rt}\triangle AFG$ 中, $AG = 1$, $FG = 1$, 所以 $AF = \sqrt{2}$ 11 分

$$\text{在 Rt}\triangle FAI \text{ 中, } \sin \angle FAI = \frac{FI}{AF} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4},$$

所以直线AB与平面ACD所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{4}$ 12分

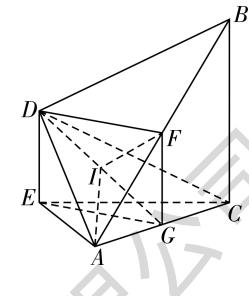


图 3

21. (1) 解: 由题可知 $c=1$, 1 分

当 l_1 与 x 轴垂直时, 不妨设 M 的坐标为 $\left(1, \frac{3}{2}\right)$, 2 分

所以 $\begin{cases} a^2 = b^2 + 1, \\ \frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1, \end{cases}$ 3 分

解得 $a=2$, $b=\sqrt{3}$ 4 分

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 5 分

(2) 证明: 设 l_1 的方程为 $x=my+1$, $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$,

联立得 $\begin{cases} x = my + 1, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases}$ 消去 x , 得 $(3m^2+4)y^2 + 6my - 9 = 0$.

易知 $\Delta > 0$ 恒成立, 由韦达定理得 $y_1 + y_2 = \frac{-6m}{3m^2+4}$, $y_1 y_2 = \frac{-9}{3m^2+4}$ 7 分

由直线 A_1M 的斜率为 $k_{A_1M} = \frac{y_1}{x_1+2}$, 得直线 A_1M 的方程为 $y = \frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$.

当 $x=1$ 时, $y_P = \frac{3y_1}{x_1+2}$ 8 分

由直线 A_2N 的斜率为 $k_{A_2N} = \frac{y_2}{x_2-2}$, 得直线 A_2N 的方程为 $y = \frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$.

当 $x=1$ 时, $y_Q = \frac{-y_2}{x_2-2}$ 9 分

若四边形 OPA_2Q 为菱形, 则对角线相互垂直且平分, 下证 $y_Q + y_P = 0$.

因为 $y_Q + y_P = \frac{3y_1}{x_1+2} + \frac{-y_2}{x_2-2} = \frac{3y_1(x_2-2) - y_2(x_1+2)}{(x_1+2)(x_2-2)} = \frac{2my_1y_2 - 3(y_1+y_2)}{(my_1+3)(my_2-1)}$, 11 分

代入韦达定理得

$$2my_1y_2 - 3(y_1+y_2) = 2m \cdot \frac{-9}{3m^2+4} - 3\left(\frac{-6m}{3m^2+4}\right) = \frac{-18m + 18m}{3m^2+4} = 0,$$

所以 $PF = QF$, 即 PQ 与 OA_2 相互垂直平分, 所以四边形 OPA_2Q 为菱形. 12 分

22. 证明: (1) 令 $f(x) = 0$, 得 $x e^{nx} - nx = 0$. 所以 $x=0$ 或 $e^{nx} = n$.

即 $x=0$ 或 $x = \frac{\ln n}{n}$.

因为点 P 在点 Q 的左侧, 所以 $P(0, 0)$, $Q\left(\frac{\ln n}{n}, 0\right)$ 1 分

因为 $f'(x) = (nx+1)e^{nx} - n$, 2 分

所以 $f'(0) = 1 - n$, 得点 P 处的切线方程为 $y = (1 - n)x$, 即 $g(x) = (1 - n)x$ 3 分
当 $x \geq 0$ 时, $f(x) - g(x) = xe^{nx} - nx - (1 - n)x = x(e^{nx} - 1)$, 4 分
因为 $x \geq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ 且 $n \geq 2$, 所以 $nx \geq 0$, 所以 $e^{nx} \geq 1$, 即 $e^{nx} - 1 \geq 0$.

所以 $x(e^{nx} - 1) \geq 0$,

所以 $f(x) \geq g(x)$ 5 分
(2) 不妨设 $x_1 \leq x_2$, 且只考虑 $x \geq 0$ 的情形.

因为 $f'(x) = (nx + 1)e^{nx} - n$, 所以 $f'\left(\frac{\ln n}{n}\right) = \left(n \frac{\ln n}{n} + 1\right)e^{\frac{\ln n}{n}} - n = (\ln n + 1)n - n = n \ln n$.

所以点 Q 处的切线方程为 $y = n \ln n \left(x - \frac{\ln n}{n}\right) = (n \ln n)x - \ln^2 n$, 记 $h(x) = (n \ln n)x - \ln^2 n$, 6 分

令 $F(x) = f(x) - h(x) = xe^{nx} - nx - [(n \ln n)x - \ln^2 n] = xe^{nx} - (n + n \ln n)x + \ln^2 n$, $x \geq 0$,
设 $G(x) = F'(x) = (nx + 1)e^{nx} - (n + n \ln n)$, 则 $G'(x) = n(nx + 2)e^{nx} > 0$.

所以 $F'(x)$ 单调递增. 又因为 $F'\left(\frac{\ln n}{n}\right) = \left(n \frac{\ln n}{n} + 1\right)e^{\frac{\ln n}{n}} - (n + n \ln n) = 0$,

所以, 当 $x \in \left(0, \frac{\ln n}{n}\right)$ 时, $F'(x) < 0$; 当 $x \in \left(\frac{\ln n}{n}, +\infty\right)$ 时, $F'(x) > 0$.

所以 $F(x)$ 在 $\left(0, \frac{\ln n}{n}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{\ln n}{n}, +\infty\right)$ 上单调递增.

所以 $F(x)$ 在 $x = \frac{\ln n}{n}$ 时有极小值, 也是最小值, 即 $F(x) \geq F\left(\frac{\ln n}{n}\right) = \frac{\ln n}{n}e^{\frac{\ln n}{n}} - (n + n \ln n)\frac{\ln n}{n} + \ln^2 n = 0$, 所以当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq h(x)$ 7 分

设方程 $h(x) = t$ 的根为 x_2' , 则 $x_2' = \frac{t + \ln^2 n}{n \ln n}$.

易知 $h(x)$ 单调递增, 由 $h(x_2) \leq f(x_2) = t = h(x_2')$, 所以 $x_2 \leq x_2'$.

对于 (1) 中 $g(x) = (1 - n)x$, 设方程 $g(x) = t$ 的根为 x_1' , 则 $x_1' = \frac{t}{1 - n}$.

易知 $g(x)$ 单调递减, 由 (1) 知 $g(x_1) \leq f(x_1) = t = g(x_1')$, 所以 $x_1' \leq x_1$
..... 8 分

所以 $x_2 - x_1 \leq x_2' - x_1' = \frac{t + \ln^2 n}{n \ln n} - \frac{t}{1 - n} = \left(\frac{1}{n \ln n} + \frac{1}{n - 1}\right)t + \frac{\ln n}{n}$, 9 分

因为 $n \ln n - (n - 1) = n(\ln n - 1) + 1$, 易知 $n \geq 3$ 时, $\ln n - 1 > 0$, 故 $n(\ln n - 1) + 1 > 0$ ($n \geq 3$); 当 $n = 2$ 时, $2(\ln 2 - 1) + 1 = \ln 4 - 1 > 0$, 所以 $n \ln n > n - 1 > 0$,

所以 $0 < \frac{1}{n \ln n} < \frac{1}{n - 1}$,

所以 $\frac{1}{n \ln n} + \frac{1}{n - 1} > \frac{2}{n \ln n}$ 10 分

记 $\varphi(x) = f'(x) = (nx + 1)e^{nx} - n$, $x \geq 0$, 则 $\varphi'(x) = n(nx + 2)e^{nx} > 0$ 恒成立.

所以 $f'(x) = (nx + 1)e^{nx} - n$ 单调递增, 因为 $f'(0) = 1 - n < 0$, $f'\left(\frac{\ln n}{n}\right) = n \ln n > 0$,

所以存在 $x_0 \in \left(0, \frac{\ln n}{n}\right)$ 使得 $f'(x_0) = 0$.

所以, 当 $x \in (0, x_0)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$.

所以 $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增.

因为 $f(0) = 0$, $f\left(\frac{\ln n}{n}\right) = 0$, 由函数图象知当方程 $f(x) = t$ (t 为实数) 有两个正实

根 x_1, x_2 时, $t < 0$, 11 分

所以 $\left(\frac{1}{n \ln n} + \frac{1}{n-1}\right)t < \frac{2t}{n \ln n}$.

所以 $x_2 - x_1 \leq x_2' - x_1' < \frac{2t}{n \ln n} + \frac{\ln n}{n}$, 即 $|x_2 - x_1| < \frac{2t}{n \ln n} + \frac{\ln n}{n}$ 12 分