★启用前注意保密

2022年普通高等学校招生全国统一考试模拟测试（一）

数学参考答案

评分标准：

1. 本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制订相应的评分细则。
2. 对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。
3. 解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	B	C	D	A	D	B	B

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。（全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分）

题号	9	10	11	12
答案	BD	ACD	AD	BC

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 60
14. AE 和 GF（AE 和 DG，AE 和 DF，AG 和 DF）（写出其中一对即可）
15. $(4\sqrt{5},\ 2\sqrt{5})$
16. $\dfrac{3}{2}-\ln 2$

四、解答题：本题共6小题，共70分。

17. 解：论断①中，由余弦定理得 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{ac}{2ac}=\dfrac{1}{2}$， …………………… 1分

由 $B\in(0,\ \pi)$，得 $B=\dfrac{\pi}{3}$. ………………………………………………………… 2分

论断②中，因为 $c=2b\cos B$，由正弦定理得，$\sin C=2\sin B\cos B=\sin 2B$，…… 3分

因为角 B，C 是 $\triangle ABC$ 的内角，所以 $C=2B$ 或 $C+2B=\pi$. …………………… 5分

论断③中，由正弦定理得，$\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C=\sin B+\sin C$，

即 $\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C=\sin(A+C)+\sin C$， ……………………………… 6分

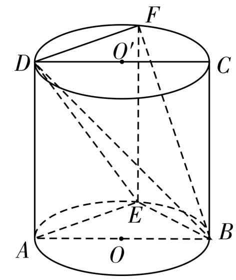
即 $\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C=\sin A\cos C+\cos A\sin C+\sin C$，

即$\sqrt{3}\sin A\sin C=\cos A\sin C+\sin C$，又因为$\sin C\neq 0$，所以$\sqrt{3}\sin A=\cos A+1$，…… 7 分

得$\sin\left(A-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$，又因为$A\in(0,\ \pi)$，所以$A-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}$，得$A=\dfrac{\pi}{3}$. …… 8 分

以其中两个论断作为条件，余下的一个论断作为结论，所有可能的真命题有：①③⇒②和①②⇒③. ………………………………………………………… 10 分

18\. （1）证明：如右图，连接AE，由题意知AB为⊙O的直径，所以$AE\perp BE$. ………………………………………………… 1 分



因为AD，EF是圆柱的母线，所以$AD/\!/EF$且$AD=EF$. 所以四边形$AEFD$是平行四边形.

所以$AE/\!/DF$.

所以$BE\perp DF$. ………………………………………………… 2 分

因为EF是圆柱的母线，所以$EF\perp$平面ABE.

又因为$BE\subset$平面ABE，

所以$EF\perp BE$. ………………………………………………… 3 分

又因为$DF\cap EF=F$，DF，$EF\subset$平面DEF，

所以$BE\perp$平面DEF. ………………………………………………………… 4 分

（2）解：由（1）知BE是三棱锥$B-DEF$底面DEF上的高，

由（1）知$EF\perp AE$，$AE/\!/DF$，所以$EF\perp DF$，即底面三角形DEF是直角三角形.

设$DF=AE=x$，$BE=y$，则$x^2+y^2=4$.

所以$V_{B-DEF}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle DEF}\cdot BE=\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\times x\times 2\right)\times y=\dfrac{1}{3}xy\leqslant\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{x^2+y^2}{2}=\dfrac{2}{3}$，

当且仅当$x=y=\sqrt{2}$时等号成立，即点E，F分别是$\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{CD}$的中点时，三棱锥$B-DEF$的体积最大. ………………………………………………………………… 8 分

（下求二面角$B-DF-E$的余弦值）

方法一：由（1）得$BE\perp$平面DEF，因为$DF\subset$平面DEF，所以$BE\perp DF$. … 9 分

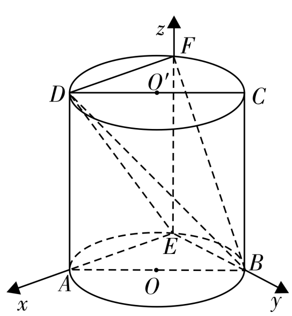
又因为$EF\perp DF$，$EF\cap BE=E$，所以$DF\perp$平面BEF. 因为$BF\subset$平面BEF，所以$BF\perp DF$. 所以$\angle BFE$是二面角$B-DF-E$的平面角. ……………………… 10 分

由（1）知$\triangle BEF$为直角三角形，则$BF=\sqrt{(\sqrt{2})^2+2^2}=\sqrt{6}$. ……………… 11 分

故$\cos\angle BFE=\dfrac{EF}{BF}=\dfrac{2}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

所以二面角$B-DF-E$的余弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. ………………………………………… 12 分

方法二：由（1）知EA，EB，EF两两相互垂直，如右图，以点E为原点，EA，EB，EF所在直线为x，y，z轴建立空间直角坐标系$E-xyz$，



则$B(0,\ \sqrt{2},\ 0)$，$D(\sqrt{2},\ 0,\ 2)$，$E(0,\ 0,\ 0)$，$F(0,\ 0,\ 2)$.
………………………………………………………… 9 分

易知平面DEF的法向量为$\overrightarrow{EB}=(0,\ \sqrt{2},\ 0)$.

设平面BDF的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,\ y,\ z)$，由$\overrightarrow{DF}=(-\sqrt{2},\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{BF}=(0,\ -\sqrt{2},\ 2)$，

得$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DF}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BF}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-\sqrt{2}x=0,\\ -\sqrt{2}y+2z=0,\end{cases}$即$\begin{cases}x=0,\\ y=\sqrt{2}z,\end{cases}$取 $z=1$，得 $\boldsymbol{n}=(0,\sqrt{2},1)$. …… 10 分

设二面角 $B-DF-E$ 的平面角为 θ，

则 $|\cos\theta|=|\cos<\boldsymbol{n},\overrightarrow{EB}>|=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EB}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{EB}|}=\dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. …………………… 11 分

由图可知 θ 为锐角，所以二面角 $B-DF-E$ 的余弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. …………………… 12 分

19. （1）证明：由题意可得，$a_1=1$. 当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}$，

所以 $(S_n-S_{n-1})[2S_n-(S_n-S_{n-1})]=1$， …………………………………… 2 分

得 $S_n^2-S_{n-1}^2=1$. …………………………………………………………………… 3 分

又 $S_1^2=a_1^2=1$，

所以 $\{S_n^2\}$ 是以 1 为首项，1 为公差的等差数列. ………………………………… 4 分

所以 $S_n^2=n$. ………………………………………………………………………… 5 分

因为 $\{a_n\}$ 是正项数列，所以 $S_n>0$. 故 $S_n=\sqrt{n}$. ………………………………… 6 分

（2）解：不存在.

理由如下：

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$， ……………………………………… 7 分

因为 $a_1=1$，所以对于 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$. ………………………… 8 分

则$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}=\sqrt{n}+\sqrt{n-1}$. ………………………………………………… 9 分

假设存在满足要求的连续三项 a_k，a_{k+1}，a_{k+2}，使得$\dfrac{1}{a_k}$，$\dfrac{1}{a_{k+1}}$，$\dfrac{1}{a_{k+2}}$构成等差数列，

则$2(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})=\sqrt{k}+\sqrt{k-1}+\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}$.

即 $\sqrt{k+1}+\sqrt{k}=\sqrt{k-1}+\sqrt{k+2}$. ………………………………………………… 10 分

两边同时平方，得 $k+1+k+2\sqrt{k+1}\sqrt{k}=k-1+k+2+2\sqrt{k-1}\sqrt{k+2}$.

即 $(k+1)k=(k-1)(k+2)$.

因为 $k^2+k=k^2+k-2$ 显然不成立，与假设矛盾， ………………………………… 11 分

所以数列 $\{a_n\}$ 中不存在满足要求的连续三项. ………………………………………… 12 分

20. 解：（1）用 A，B，C 分别表示篮球，羽毛球，游泳三种运动项目，用 $P_n(A)$，$P_n(B)$，$P_n(C)$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 分别表示第 n 天小王进行 A，B，C 三种运动项目的概率. ………………………………………………………………………………… 1 分

因为小王第一天打羽毛球，

所以第 2 天小王做三项运动的概率分别为 $P_2(A)=0.3$，$P_2(B)=0.1$，$P_2(C)=0.6$. ………………………………………………………………………………… 2 分

第 3 天小王做三项运动的概率分别为 $P_3(A)=P_2(A)\times0.5+P_2(B)\times0.3+P_2(C)\times0.3=0.36$，

$P_3(B)=P_2(A)\times0.2+P_2(B)\times0.1+P_2(C)\times0.6=0.43$，

$P_3(C)=P_2(A)\times0.3+P_2(B)\times0.6+P_2(C)\times0.1=0.21$， ……………………… 4 分

所以小王第三天打羽毛球的可能性最大. ………………………………………………… 5 分

（2）小王从第一天打羽毛球开始，前三天的运动项目安排有：BAA，BAB，BAC，BBA，BBB，BBC，BCA，BCB，BCC 共 9 种，

运动能量消耗总数用 X 表示，有 1200，1300，1400，1500，1600 共 5 种可能，…… 6 分

$P(X=1200)=P(BBB)=0.1\times 0.1=0.01$，

$P(X=1300)=P(BAB)+P(BBA)=0.3\times 0.2+0.1\times 0.3=0.09$，

$P(X=1400)=P(BAA)+P(BBC)+P(BCB)=0.3\times 0.5+0.1\times 0.6+0.6\times 0.6=0.57$，

$P(X=1500)=P(BAC)+P(BCA)=0.3\times 0.3+0.6\times 0.3=0.27$，

$P(X=1600)=P(BCC)=0.6\times 0.1=0.06$，…………………………………… 9 分

所以小王从第一天打羽毛球开始，前三天参加体育运动能量消耗总数 X 的分布列为

X	1200	1300	1400	1500	1600
P	0.01	0.09	0.57	0.27	0.06

…………………… 10 分

能量消耗总数 X 的期望

$E(X)=1200\times 0.01+1300\times 0.09+1400\times 0.57+1500\times 0.27+1600\times 0.06=1428$（卡）.

所以小王从第一天打羽毛球开始，前三天参加体育运动能量消耗总数 X 的期望为 1428 卡．…………………………………………………………………… 12 分

21. （1）解：因为 $f'(x)=\dfrac{1}{x}+a=\dfrac{ax+1}{x}$ $(x>0)$，…………………………………… 1 分

所以，当 $a\geqslant 0$ 时，$f(1)=a+1>0$ 不符合题意. …………………………………… 2 分

当 $a<0$ 时，令 $f'(x)<0$，得 $x>-\dfrac{1}{a}$；令 $f'(x)>0$，得 $0<x<-\dfrac{1}{a}$，

所以 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\ -\dfrac{1}{a}\right)$ 上单调递增，在区间 $\left(-\dfrac{1}{a},\ +\infty\right)$ 上单调递减，…… 3 分

由题得 $f\left(-\dfrac{1}{a}\right)=\ln\left(-\dfrac{1}{a}\right)\leqslant 0$，解得 $a\leqslant -1$. …………………………………… 4 分

所以 $a\leqslant -1$.

综上所述 $a\leqslant -1$. …………………………………………………………………… 5 分

（2）证明：设 $g(x)=f'(x)-\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$，问题转化为 $g(x)$ 在区间 $(x_1,\ x_2)$ 上有唯一的零点，…………………………………………………………………… 6 分

由 $g(x)=f'(x)-\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\dfrac{1}{x}+a-\dfrac{\ln x_1+ax_1-\ln x_2-ax_2}{x_1-x_2}$，易知 $g(x)$ 在区间 $(x_1,\ x_2)$ 上单调递减，故函数 $g(x)$ 在区间 $(x_1,\ x_2)$ 上至多有 1 个零点，…… 7 分

由 $g(x_1)=f'(x_1)-\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\dfrac{1}{x_1}+a-\dfrac{\ln x_1+ax_1-\ln x_2-ax_2}{x_1-x_2}=$

$\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=\dfrac{1}{x_1-x_2}\left(1-\dfrac{x_2}{x_1}+\ln\dfrac{x_2}{x_1}\right)$，

同理，得 $g(x_2)=\dfrac{1}{x_1-x_2}\left(\dfrac{x_1}{x_2}-1+\ln\dfrac{x_2}{x_1}\right)$，…………………………………… 8 分

由（1）知，当 $a=-1$ 时，$\ln x-x+1\leqslant 0$，当且仅当 $x=1$ 时取等号，…… 9 分

因为 $0<x_1<x_2$，所以 $\dfrac{x_2}{x_1}>1$，

所以 $\ln\frac{x_2}{x_1}-\frac{x_2}{x_1}+1<0$，

又因为 $x_1-x_2<0$，即 $\frac{1}{x_1-x_2}<0$，所以 $g(x_1)>0$， ································ 10 分

因为 $0<x_1<x_2$，所以 $0<\frac{x_1}{x_2}<1$，

所以 $\ln\frac{x_1}{x_2}-\frac{x_1}{x_2}+1<0$，即 $\ln\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}-1>0$，

又因为 $x_1-x_2<0$，即 $\frac{1}{x_1-x_2}<0$，所以 $g(x_2)<0$， ································ 11 分

由函数零点存在定理知 $g(x)$ 在区间 $(x_1,\ x_2)$ 上有唯一的零点，即存在唯一的 $x_0\in(x_1,\ x_2)$，使得 $f'(x_0)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ 成立. ···································· 12 分

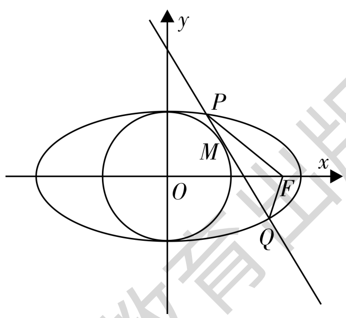
22. 解：（1）由题可知 $c=\sqrt{3}$， ··· 1 分

当点 M 在 x 轴上时，$|PQ|=\sqrt{3}$，不妨设 $P\left(b,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$， ···························· 2 分

得 $\begin{cases} a^2-b^2=3, \\ \frac{b^2}{a^2}+\frac{\frac{3}{4}}{b^2}=1, \end{cases}$ ·· 3 分

解得 $\begin{cases} a=2, \\ b=1. \end{cases}$ 所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ·································· 4 分

（2）设 $P(x_1,\ y_1)$，$Q(x_2,\ y_2)$，



则 $|PF|=\sqrt{(x_1-\sqrt{3})^2+(y_1-0)^2}=\sqrt{(x_1-\sqrt{3})^2+1-\frac{x_1^2}{4}}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_1-2\right)^2}=2-\frac{\sqrt{3}}{2}x_1$.

同理 $|QF|=2-\frac{\sqrt{3}}{2}x_2$， ·· 5 分

$|PM|=\sqrt{OP^2-b^2}=\sqrt{x_1^2+y_1^2-1}=\sqrt{x_1^2-\frac{x_1^2}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}|x_1|$.

同理 $|QM|=\frac{\sqrt{3}}{2}|x_2|$.

所以 $\triangle FPQ$ 的周长为

$2-\frac{\sqrt{3}}{2}x_1+2-\frac{\sqrt{3}}{2}x_2+\frac{\sqrt{3}}{2}|x_1|+\frac{\sqrt{3}}{2}|x_2|=4+\sqrt{3}\frac{|x_1|+|x_2|-x_1-x_2}{2}$. ……………… 6 分

①当直线 PQ 的斜率不存在时，PQ 的方程为 $x=1$ 或 $x=-1$.

PQ 的方程为 $x=1$ 时，不妨设 P，Q 的坐标分别为 $\left(1,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\left(1,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，此时 $\triangle FPQ$ 的周长为 4.

PQ 的方程为 $x=-1$ 时，不妨设 P，Q 的坐标分别为 $\left(-1,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\left(-1,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，此时 $\triangle FPQ$ 的周长为 $4+2\sqrt{3}$. ……………………………………………………………… 7 分

②当直线 PQ 的斜率存在时，设 PQ 的方程为 $y=kx+m$，

由直线 PQ 与圆 $x^2+y^2=1$ 相切，得 $d=\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，即 $m^2=1+k^2$. ……… 8 分

联立得 $\begin{cases} y=kx+m, \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1. \end{cases}$ 化简得 $(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-4=0$.

$\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{8km}{1+4k^2}, \\ x_1x_2=\frac{4m^2-4}{1+4k^2}. \end{cases}$ 易知 $\Delta>0$ 恒成立，……………………………………………… 9 分

$x_1x_2=\frac{4m^2-4}{1+4k^2}=\frac{4k^2}{1+4k^2}>0$，即 x_1，x_2 同号，

当 $x_1+x_2=-\frac{8km}{1+4k^2}>0$ 时，即 $km<0$，此时点 M 在 y 轴右侧，所以 $x_1>0$，$x_2>0$.

此时 $\triangle FPQ$ 的周长 $=4+\sqrt{3}\frac{|x_1|+|x_2|-x_1-x_2}{2}=4$ 为定值. ……………… 10 分

当 $x_1+x_2=-\frac{8km}{1+4k^2}<0$ 时，即 $km>0$，此时点 M 在 y 轴左侧，所以 $x_1<0$，$x_2<0$.

此时 $\triangle FPQ$ 的周长 $=4+\sqrt{3}\frac{|x_1|+|x_2|-x_1-x_2}{2}=4-\sqrt{3}(x_1+x_2)=4+\frac{8\sqrt{3}km}{1+4k^2}=$

$4+\frac{8\sqrt{3}km}{m^2+3k^2}=4+\frac{8\sqrt{3}}{\frac{m}{k}+3\frac{k}{m}}$. ……………………………………………………… 11 分

因为 $km>0$，所以 $\frac{m}{k}+3\frac{k}{m}\geqslant 2\sqrt{3}$，当且仅当 $\frac{m}{k}=3\frac{k}{m}$，即 $\begin{cases} m=\frac{\sqrt{6}}{2}, \\ k=\frac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m=-\frac{\sqrt{6}}{2}, \\ k=-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ 时取等号.

从而 $4<4+\frac{8\sqrt{3}}{\frac{m}{k}+3\frac{k}{m}}\leqslant 8$，所以 $\triangle FPQ$ 周长的取值范围为 $(4,\ 8]$.

综上所述，$\triangle FPQ$ 周长的取值范围为 $[4,\ 8]$. ………………………………… 12 分